ECOLES NORMALES SUPERIEURES FONTENAY-ST CLOUD

Option "Mathématiques" (M') 1979

MATHEMATIQUES I

Durée : 4 heures

Dans tout ce problème n est un entier positif, $\mathbb{R}$ est le corps des réels, $\mathbb{C}$ est le corps des complexes et E est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$.

On rappelle que, si $\mathcal{H}$ est une forme hermitienne non dégénérée sur E, deux éléments x et y de E sont dits orthogonaux relativement à $\mathcal{H}$ si $\mathcal{H}(x, y) = 0$; la forme $\mathcal{H}$ étant non dégénérée, seul le vecteur nul est orthogonal à tout élément de E. L'adjoint $u^{\mathcal{H}}$ d'un endomorphisme u de E par rapport à $\mathcal{H}$ est caractérisé par

(1) $\mathcal{H}(ux, y) = \mathcal{H}(x, u^{\mathcal{H}}y)$ quels que soient $x, y \in E$.

L'adjoint de u par rapport à la forme canonique

(2) $(x \mid y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n \quad (x = (x_k),\ y = (y_k))$

est noté u^*. On dit que u est auto-adjoint si $u = u^*$, auquel cas à u est attachée une forme hermitienne $\mathcal{U}$ définie par

(3) $\mathcal{U}(x, y) = (ux \mid y)$ quels que soient $x, y \in E$;

si $\mathcal{U}$ est positive non dégénérée, on dira que u est auto-adjoint positif.

Enfin on dira qu'une matrice carrée complexe, $M \in M_n(\mathbb{C})$, et un endomorphisme m de E sont associés si M est la matrice de m sur la base canonique de E; si m et M sont associés, la matrice associée à m^* est notée M^* et M est dite auto-adjointe si m est auto-adjoint, auto-adjointe positive si m est auto-adjoint positif.

I

Soient h un endomorphisme auto-adjoint positif de E, $\mathcal{H}$ la forme hermitienne attachée à h et u un endomorphisme de E.

1° Démontrer que $u^{\mathcal{H}} = h^{-1}u^*h$.

2° On suppose que $u^{\mathcal{H}} = ru$, où $r \in \mathbb{C}$, et que u est inversible.

a. Démontrer que $r\bar{r} = 1$.

b. Soit x un vecteur propre de u. Démontrer que l'orthogonal de x relativement à $\mathcal{H}$ est stable par u. En déduire que E est somme directe des sous-espaces propres de u et que ceux-ci sont deux à deux orthogonaux relativement à $\mathcal{H}$.

c. Démontrer que si a est valeur propre de u, alors $\bar{a} = ra$.

3° Soit $e \in \{1, -1\}$ et soit s un endomorphisme de E tel que $s^* = es$. On suppose que $u = sh$. Calculer $u^{\mathcal{H}}$. Démontrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont réelles si $e = 1$ et imaginaires pures si $e = -1$.

II

Dans ce qui suit on considère un sous-corps K de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison, c'est-à-dire tel que $x \in K$ entraîne $\bar{x} \in K$. Soit $e \in \{1, -1\}$. On se propose d'étudier les éléments X de $M_n(\mathbb{C})$ possédant la propriété suivante, notée $R^e_K(X)$,

$R^e_K(X)$: Il existe $T \in M_n(K)$ tel que $T^* = eT$ et que la matrice TX soit auto-adjointe positive.

On considère $U \in M_n(\mathbb{C})$ et $S \in M_n(K)$ telles que $S^* = eS$ et que $H = SU$ soit auto-adjointe positive. On a donc $R^e_K(U)$.

1° Montrer que U est diagonalisable; que peut-on dire des valeurs propres de U ?

2° Caractériser les matrices diagonales $D \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $R^e_{\mathbb{C}}(D)$, puis les $X \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $R^e_{\mathbb{C}}(X)$.

3° On suppose dans cette question que $K = \mathbb{R}$; on a donc $R^e_{\mathbb{R}}(U)$ et $S \in M_n(\mathbb{R})$. On décompose H et U en « partie réelle et partie imaginaire » :

$H = H_1 + iH_2$ et $U = U_1 + iU_2$ où $H_1, H_2, U_1, U_2 \in M_n(\mathbb{R})$, $(i^2 = -1)$.

a. Soit h_1 l'endomorphisme de E associé à H_1, et soit x un élément non nul de E, de composantes réelles sur la base canonique de E. Démontrer que $(h_1x \mid x) > 0$.

.../...

b. Démontrer qu'il existe $P \in M_n(\mathbb{R})$, inversible, telle que

$$P^* H_1 P = I_n \quad (I_n \text{ élément unité de } M_n(\mathbb{R})).$$

c. Démontrer que si P vérifie l'égalité de 3° *b.*, la matrice $V = P^{-1} U_1 P$ a la propriété $V^* = eV$, et que $A = P^{-1} U_1^{-1} U_2 P$ vérifie $A + A^* = 0$.

4° On pose

$$\mathfrak{U} = \{ A \in M_n(K) ; AU = UA \}$$

et on définit $\sigma : M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$ par $\sigma(A) = S^{-1} A^* S$.

Démontrer que $\sigma \circ \sigma$ est l'identité et que $\sigma(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$. En déduire que tout élément A de $\mathfrak{U}$ peut se décomposer en

$A = A^+ + A^-$ avec $A^+ \in \mathfrak{U}$, $A^- \in \mathfrak{U}$, $\sigma(A^+) = A^+$ et $\sigma(A^-) = -A^-$.

Que peut-on dire des valeurs propres de A^+ et de A^- ?

5° Soient $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des éléments de $\mathbb{C}$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les racines complexes, distinctes ou non, du polynôme en X

$$X^n + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} b_k X^{k-1}.$$

On considère les matrices

D diagonale de coefficients $\quad D_{k,k} = a_k \qquad (1 \leqslant k \leqslant n)$

Q de coefficients $\quad Q_{k,j} = (a_k)^{j-1} \quad (1 \leqslant k, j \leqslant n)$

M de coefficients
$$\begin{cases} M_{k,j} = 0 \quad \text{si} \quad (j \neq n, j \neq k-1), (1 \leqslant k, j \leqslant n) \\ M_{k+1,k} = 1 \quad \text{si} \quad 1 \leqslant k < n \\ M_{k,n} = -b_k \quad \text{si} \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

Démontrer que $QM = DQ$. Démontrer que si Q est inversible les valeurs propres de M sont deux à deux distinctes et examiner la réciproque.

6° Les notations et hypothèses de 4° et 5° sont conservées. On suppose que Q est inversible et que $M \in \mathfrak{U}$. Démontrer que si $\sigma(M) = M$, ou $\sigma(M) = -M$, les matrices $S_1 = Q^{*-1} S Q^{-1}$ et D commutent. Quelle conclusion en tirer sur S_1 ? Démontrer que si $K = \mathbb{R}$ et si $\sigma(M) = M$, on a $e = 1$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail